5. TRANSFORMADA DE FOURIER Y APLICACIONES

- La transformada de Fourier es una aplicación matemática que constituye una herramienta de primer nivel para numerosos campos de la técnica y la investigación científica. Su gran capacidad de simplificación la hace una herramienta insustituible en el análisis de señales y sistemas (todo lo relacionado con ondas), mediciones de todo tipo, etc...

5.1. SERIE DE FOURIER EN ESPACIOS EUCLÍDEOS

- Sea E un espacio euclídeo (espacio vectorial normado, cuya norma está asociada al producto escalar ordinario) de dimensión infinita cuya base es el sistema ortonormado $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots$

- COEFICIENTES DE FOURIER: Se denominan coeficientes de Fourier del elemento $f \in E$, según el sistema ortonormado $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots \{\varphi_m\}$; a la sucesión de números:

$$\boxed{c_k = (f, \varphi_k) \quad / k = 1, 2, \dots n \dots}$$

NOTAS: trabajamos en un espacio donde definimos el producto escalar de funciones, representado por: (f, g) como:

$$\boxed{(f, g) = \int_D f(x)\, g(x)\, dx}$$

NOTAS: en este espacio vectorial utilizamos como norma la asociada al producto escalar de funciones, tal que:

$$\boxed{\begin{gathered} \| f \| = \sqrt{(f, f)} \\ \Updownarrow \\ \| f \|^2 = (f, f) \end{gathered}}$$

- Recordamos que esta norma verifica:

$\| f \| = 0 \iff f = 0$

$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ (desigualdad de Schwarz)

$\| c \cdot f \| = |c| \cdot \| f \|$

SERIE DE FOURIER: Se denomina serie de Fourier del elemento $f \in E$, según el sistema ortonormado $\{\varphi_n\}$ a la expresión:

$$\boxed{\sum_{K=} C_K \varphi_K}$$

- Esta expresión es la formulación del elemento f en función de sus coeficientes de Fourier (C_K) respecto del sistema ortonormado (φ_K); obteniendo los coeficientes de dicho elemento:

$$\boxed{C_K = (f_K, \varphi_K) \quad / \; K = 1, 2, \ldots n \ldots}$$

- Propiedad: la serie de Fourier es la mejor aproximación del elemento $f \in E$ utilizando una forma $\sum_{K=1}^{n} \alpha_K \varphi_K$

$$\boxed{S_n = \sum_{K=1}^{n} \alpha_K \varphi_K}$$

- Para demostrar esta afirmación, vamos a calcular cuál es el error que cometemos al tomar la aproximación de la serie de Fourier.

- Demostración:

error: $d(f, S_n) = \| f - S_n \|$

$$\left.\begin{array}{l} \| f - S_n \|^2 = (f - S_n, f - S_n) \\ S_n = \sum^n \alpha_k \varphi_k \end{array}\right\} \| f - S_n \|^2 = \left(f - \sum^n \alpha_k \varphi_k , f - \sum^n \alpha_k \varphi_k \right)$$

Realizando el producto escalar:

$$\| f - S_n \|^2 = (f, f) - 2 \left(f, \sum^n \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum^n \alpha_k \varphi_k , \sum \alpha_j \varphi_j \right)$$

Definición de norma

Definición $C_K = (f, \varphi_K)$

Por ser $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal se aplica la delta de Kronecker ya que prod. esc. es nulo por ser $\perp$ si $k \neq j$ y es uno $k = j$ por ser normados

$$\underbrace{\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - 2 \sum^n \alpha_K C_K + \sum \alpha_K^2}$$

por su semejanza con el cuadrado de una diferencia

$$\boxed{\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 + \sum (\alpha_K - C_K)^2 - \sum C_K^2}$$

- El error que se producirá al aproximar verifica que será mayor o igual que cero $\| f - S_n \|^2 \geq 0$ de forma que siempre quedará por debajo (S_n de f). Para tratar de minimizar el error, como f y C_K son parámetros arbitrarios que dependen de la función f que tomemos, la mejor aproximación será: $\sum (\alpha_K - C_K) = 0$; luego:

$$\sum \alpha_K = \sum C_K \rightarrow \boxed{\alpha_K = C_K}$$

- Demostrando así que la serie de Fourier es la mejor aproximación.

- Como consecuencia del resultado anterior la desigualdad de Bessel: $\boxed{\sum_{K=1}^{\infty} C_K^2 \leq \|f\|^2}$

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum C_K^2 \geq 0$$

$\alpha_K = C_K$

- Esta desigualdad nos proporciona dos conclusiones importantes y es que: la aproximación del elemento f que hagamos con la serie de Fourier siempre va a ser menor que dicho elemento f y que la aproximación puede converger a la del elemento f.

IGUALDAD DE PARSEVAL : la igualdad de Parseval enuncia que la serie de Fourier con la que aproximamos el elemento f se iguala a la norma cuadrada del elemento cuando el sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ que utilizamos es cerrado (un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ es cerrado si y solo si $\forall f \in E$, las sumas parciales de la serie de Fourier $\sum_n C_n \varphi_n$ convergen a f); en un espacio completo, donde el valor de la sucesión tiende al valor del área que encierra la función hasta igualarla:

$$\boxed{\sum_{K=1}^{\infty} C_K^2 = \|f\|^2}$$

otras expresiones:

$$\|f\| = (f, f) = \int_{D} |f(x)|^2 dx = \sum |(f, \varphi_K)|^2$$

5.1.1. EXTENSIÓN A SISTEMAS ORTOGONALES, NO ORTONORMALES $\{\psi_n\}$

- Cuando tratemos con situaciones reales es probable que el sistema de funciones que utilicamos no sea ortonormal pero sí ortogonal, para normalizarlo:

$$\boxed{\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}}$$

- Ahora ya disponemos de un sistema ortonormal, pero si queremos utilizar nuestro sistema $\{\psi_n\}$ nos conviene expresar otros parámetros referenciados a este sistema:

- Coeficientes de Fourier: $$\boxed{c_n = (f, \varphi_n) = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|}}$$

- Serie de Fourier: $$\boxed{\sum_n c_n \varphi_n = \sum_n c_n \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} = \sum_n a_n \psi_n}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}}$$

5.2. SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

- A partir de ahora vamos a trabajar en un espacio de funciones de cuadrado integrable $L_2[-\pi, \pi]$ ($f \in L_p(-\infty,\infty)$ si $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p < \infty$) donde el producto escalar está definido como $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$; que es un espacio de Hilbert (espacio completo donde la sucesión converge al elemento $f \Rightarrow \forall f \in L_2,\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$)

SISTEMA TRIGONOMÉTRICO: El sistema de $L_2[-\pi, \pi]$ formado por las funciones $\{1, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx)\} / n = 1,2,\dots$ se denomina sistema trigonométrico. Este sistema es completo ortogonal.

NOTA: el sistema trigonométrico (el original que estudió Fourier) nos servirá de base aproximadora. El primer término (1) es superfluo si n fuese $n = 0, 1, 2 \dots$ ya que $\cos(0x) = 1$. Este término nos servirá para aproximar funciones constantes y/o desplazar las funciones $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$.

- El sistema trigonométrico no está normalizado, su expresión pasa a sistema ortonormal como $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ para $n = 1, 2, \dots$

Se le ha normalizado: $\varphi_n = \dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\|1\|} \quad ; \quad \|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx = x \Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \longrightarrow \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varphi_2 = \frac{\cos(nx)}{\|\cos(nx)\|} \; ; \; \|\cos(nx)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}(nx) + \frac{1}{4} \underbrace{\operatorname{sen} 2(nx)}_{0}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2n\pi}{2n} = \pi$$

$$\varphi_2 = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

- Coeficientes de Fourier para el sistema trigonométrico (armónicos):

$$\boxed{a_i = \frac{(f, \psi_i)}{\| \psi_i \|^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t)\, dt$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) dt$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{L}\right) dt$$

Para un espacio $L\left[-L/2, L/2\right]$

Armónico fundamental

$n = 1 \rightarrow$ frecuencia $= \frac{2\pi}{L}$

- Los parámetros anteriores quedan como:

- Serie de Fourier: $\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi t}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n \frac{2\pi t}{L}\right)\right)}$

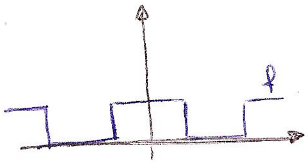
- Cuando aplicamos estas herramientas matemáticas a física (con variables temporales $L = T =$ periodo) o a óptica (con variables espaciales $L = \lambda =$ longitud de onda) manejamos:

Variables temporales: $L = T$; $\nu = \frac{1}{T}$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Variables espaciales: $L = \lambda$; $\alpha = \frac{1}{\lambda}$; $K = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\alpha$

- Una propiedad muy útil del sistema trigonométrico es que los sistemas $\cos nx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, \ldots$ constituyen, cada uno de ellos por separado, un sistema ortogonal completo en $[0, \pi]$

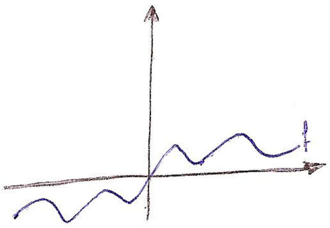
- Esta propiedad nos permite utilizar directamente estos sistemas para ciertas funciones:



- Desarrollo en serie de cosenos: se denomina desarrollar f en serie de cosenos sobre el intervalo $[0, \pi]$ a desarrollar en serie de Fourier una función $f \in L_2[-\pi, \pi]$ que es par, obteniendo:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \ldots + \alpha_n \cos nx + \ldots}$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}$$



- Desarrollo en serie de senos: se denomina desarrollar f en serie de senos sobre el intervalo $[0, \pi]$ a desarrollar en serie de Fourier una función $f \in L_2[-\pi, \pi]$ que es impar, obteniendo:

$$\boxed{f(x) = \beta_1 \operatorname{sen} x + \ldots + \beta_n \operatorname{sen}(nx) + \ldots}$$

$$\boxed{\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx}$$

- Existe un mecanismo matemático que nos permite acortar las expresiones del sistema trigonométrico en un solo elemento.

- FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER: si tenemos en cuenta que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$; llamamos forma compleja de la serie de Fourier a la expresión: $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$ donde $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

NOTAS: la forma compleja referenciada a los armónicos:

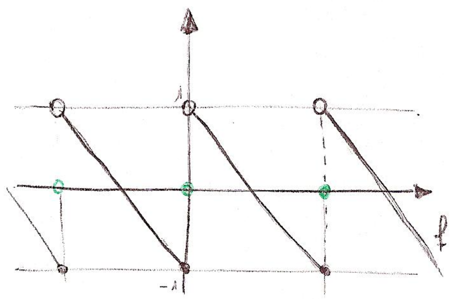
$$c_0 = \frac{a_0}{2} \;;\quad c_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2} \;;\quad c_{-n} = \frac{(a_n + ib_n)}{2}$$

Cuando tengamos un periodo $L \Rightarrow c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-in\frac{2\pi x}{L}}\, dx$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

- CONVERGENCIA EN TODO PUNTO. CONDICIÓN DE DINI: si el elemento f es integrable y para un x fijo existe la integral $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+z) - f(x)}{z}\, dz$ para algún valor $\delta > 0$, entonces las sumas parciales S_x de la serie de Fourier de la función f convergen en x a $f(x)$.

NOTA: En los puntos de discontinuidad de primera especie (salto), si existen las integrales $\int_{-\delta}^{0} \frac{f(x+z) - f(x-0)}{z}\, dz$ y $\int_{0}^{-\delta} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z}\, dz$ (límites laterales) entonces $S_n(x)$ converge a $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ (valor medio)



● Valor de $S_n(x)$ en los puntos de discontinuidad de 1^a especie de f

5.2. TRANSFORMADA DE FOURIER

- La transformada de Fourier surge cuando tratamos de extender los resultados de la serie de Fourier a funciones no periódicas.

- Si tomamos una función periódica (pulso rectangular: ej) y realizamos su serie de Fourier representando las frecuencias obtenidas para cada valor de n (dominio de la frecuencia); conforme aumentamos el periodo en el dominio temporal, la serie de Fourier en el dominio de la frecuencia (espacio recíproco) va tomando valores cada vez más cercanos entre sí, hasta que en el límite (cuando el periodo de la función es $(-\infty, \infty)$), los valores de la serie de Fourier (de las frecuencias) están tan juntos que constituyen una función continua.

$\omega = \frac{n2\pi}{T}$

$2\pi\nu = \frac{n2\pi}{T}$

$\nu = \frac{n}{T}$

TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER: si la función $f(t)$ es absolutamente integrable* $\left[\exists\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt \;\forall t\in\mathbb{R}\right]$ y verifica la condición de Diri en todo punto t, entonces:

$$\boxed{f(t) = \int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\,\text{sen}(\omega t)\right)d\omega}$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt} \qquad \boxed{B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(\omega t)\,dt}$$

*en $(-\infty, \infty)$

NOTA: la expresión anterior debe ser sustituida por:

$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ en cada discontinuidad de 1ª especie.

FORMAS EQUIVALENTES DEL TH. INTEGRAL DE FOURIER: algunas expresiones equivalentes para el th. integral de Fourier son:

- $$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(t-u)\,du$$

- $$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\omega(t-u)}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\,du}$$

Forma compleja

- Al igual que con la serie de Fourier:

  - cuando $f(t)$ es par:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega t\,d\omega \int_0^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du$$

  - cuando $f(t)$ es impar:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{sen}\omega t\,d\omega \int_0^{\infty} f(u)\operatorname{sen}\omega u\,du$$

5.2.1. TRANSFORMADA DE FOURIER

- Se denomina transformada de Fourier de una función $f \in L_1(-\infty,\infty)$ [integrable en $(-\infty,\infty)$] a la expresión:

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\,dt}$$

- Como la expresión es compleja se pueden utilizar distintas notaciones, siendo habitual aquella que utiliza el módulo y argumento:

$$\boxed{F(\omega) = \Re(\omega) + i\,\Im(\omega) = A(\omega)\, e^{i\,\Phi(\omega)}}$$

$A(\omega)$ = espectro de Fourier; $\underbrace{A^2(\omega) = \text{espectro de potencia}}$; $\Phi(\omega)$ = fase

es el más usado por los software de computación e ingeniería.

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE: cuando queremos pasar del dominio de la frecuencia al temporal, utilizamos la expresión:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

- En las aplicaciones reales siempre se trabaja en función de la frecuencia (ν):

$$\boxed{F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt} \qquad \boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu}$$

$d\omega = 2\pi\, d\nu$

- De manera análoga a la serie de Fourier, en muchas ocasiones nos convendrá utilizar:

- TRANSFORMADA EN COSENO: se denomina transformada en coseno de la función $f \in L_1(-\infty,\infty)$ a:

$$\boxed{F_c(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos \omega t \, dt}$$

- TRANSFORMADA EN SENO: se denomina transformada en seno de la función $f \in L_1(-\infty,\infty)$ a:

$$\boxed{F_s(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\,\text{sen}\, \omega t \, dt}$$

- Estas expresiones cobran especial relevancia si tenemos en cuenta que:

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) - i\,\text{sen}(\omega t)\right)dt = F_c(\omega) - i F_s(\omega)}$$

- ...de manera que en funciones impares:

$$\boxed{F(\omega) = F_s(\omega)}$$

- ... y en funciones pares:

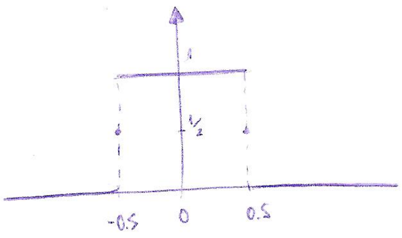
$$\boxed{F(\omega) = F_c(\omega)}$$

- TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES: se denomina de Fourier de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ integrable en $\mathbb{R}^n$ a:

$$F(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\cdot e^{-i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dx_1 \dots dx_n$$

FUNCIONES ÚTILES: Algunas funciones aparecen con frecuencia y poseen características que las hacen especialmente útiles como:

- Función pulso rectangular:



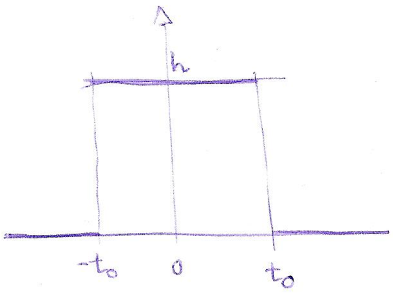
caso unidad

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1/2 \\ \left[\frac{1}{2}\right. & \left.|x| = 1/2\right] \\ 1 & |x| < 1/2 \end{cases}$$

- Se caracteriza por su altura, su anchura y el área que contiene.

TRANSFORMADA DEL PULSO RECTANGULAR:

$$\Pi(t) = \begin{cases} h & \text{si } |t| < t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$



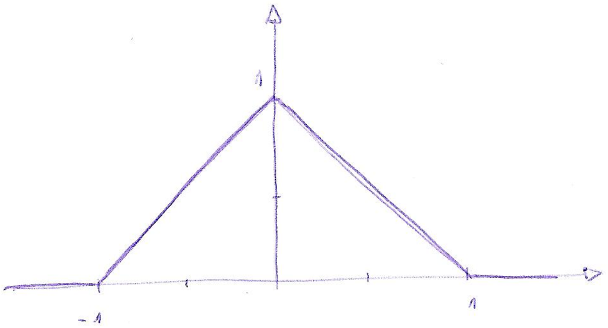
alto: h ancho: $2t_0$

$$\mathcal{F}(\Pi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \int_{-t_0}^{t_0} h \cdot e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \frac{-h}{i2\pi\nu} e^{-i2\pi\nu t}\Big]_{-t_0}^{t_0} =$$

$$= \frac{-h}{i2\pi\nu}\left(e^{-i2\pi\nu t_0} - e^{i2\pi\nu t_0}\right) = \frac{h}{\pi\nu}\, \frac{e^{i2\pi\nu t_0} - e^{-i2\pi\nu t_0}}{2i} =$$

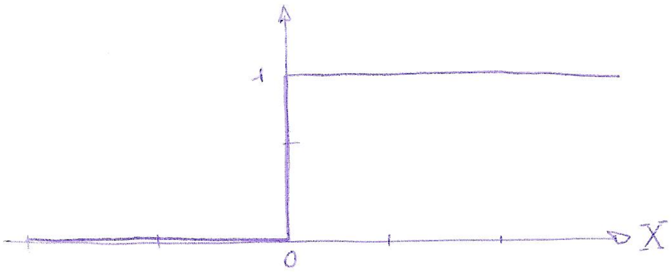
$$= \frac{h}{\pi\nu}\,\text{sen}(2\pi\nu t_0) = \underbrace{2t_0}_{\text{ancho}} \cdot \underbrace{h}_{\text{alto}} \cdot \frac{\text{sen}\, 2\pi\nu t_0}{2\pi\nu t_0} = 2t_0 \cdot h \cdot \text{sinc}(2\nu t_0)$$

- Función triángulo (altura 1):



$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1-|x| & |x| < 1 \end{cases}$$

- Función escalón de Heaviside (unidad):

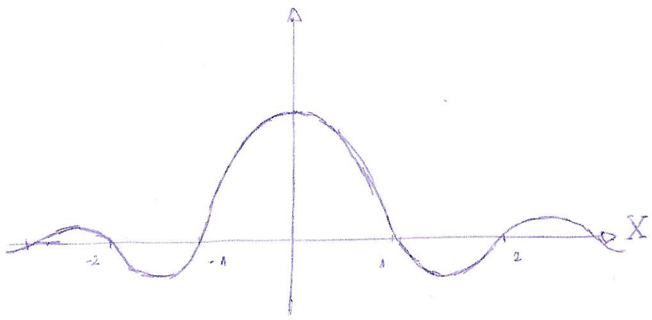


$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left[\frac{1}{2} \quad x = 0\right] \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Esta función carece de derivada ya que es constante excepto en el origen, donde su derivada es la delta de Dirac.

- Función seno cardinal (de filtrado, de interpolación):

- La gran utilidad de esta función radica en su colocación de aquellos puntos que la anulan, es decir, en aquellas frecuencias donde la excitación es nula, en el campo de la frecuencia; o aquellos lugares sin perturbación.



$$\mathrm{sinc}\ ax = \frac{\mathrm{sen}\, a\pi x}{a\pi x} \qquad [a=1] \begin{cases} \mathrm{sinc}\ 0 = 1 \\ \mathrm{sinc}\ n = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\ x\, dx = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\ \pi x}{\pi x}\, dx = 1}$$

5.2.1.a. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA

- **LINEALIDAD**: la transformada de Fourier es una aplicación lineal:

$$\boxed{a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \Leftrightarrow a F(\nu) + b\, G(\nu)}$$

- **SIMETRÍA**: la transformada de una función temporal $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$ en el plano temporal $F(t)$ tiene como transformada inversa la función temporal en el campo de las frecuencias con signo opuesto: $F(t) \Leftrightarrow F(\nu)$; $F(t) \Leftrightarrow f(-\nu)$

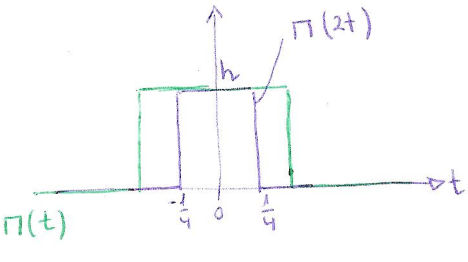
Ej: la transformada del pulso es la función sinc, luego la función sinc tiene como transformada el pulso cambiado de signo pero como este es par $f(t) = f(-t)$ podemos usar el pulso directamente.

* Si usamos las propiedades, debes sostenerlas haciendo la prueba de lo que dices

- **ESCALADO**: la transformada de una función temporal por una constante $[f(at)]$ es igual a su transformada de $\frac{\nu}{a}$ por $\frac{1}{|a|}$:

$$\boxed{f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)}$$

ejemplo: estrechamiento de un pulso:



$$\mathcal{F}(\Pi(2t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(2t) \cdot e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t')\, e^{-i2\pi\frac{\nu}{2}t'}\, dt'$$

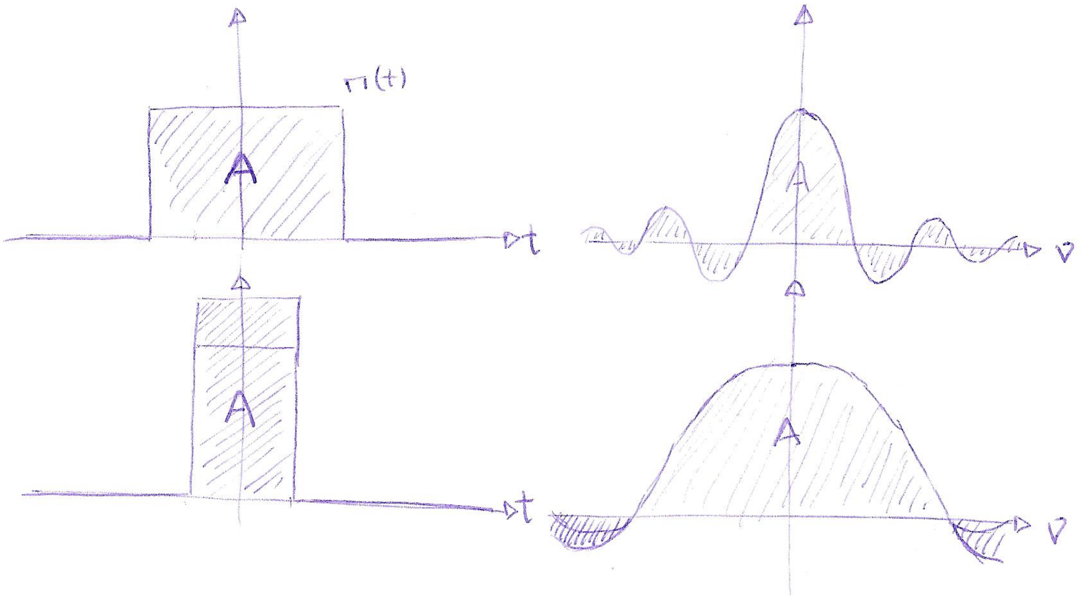
$2t = t'$

$dt = \frac{1}{2} dt'$

*Si $a<0$; cambian los límites, pero al final el facto $\frac{1}{a}$ es positivo de ahí el valor absoluto

$$\Pi(2t) = \begin{cases} 0 & |2t| > \frac{1}{2} \\ h & |2t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(\Pi(2t)) = \frac{1}{2} F\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{\operatorname{sen} \pi\nu\frac{1}{4}}{\pi\nu\frac{1}{4}}$$



- ¿Para que sirve la propiedad del escalado? Aplicado a la función pulso (o cualquier otra) observamos como un estrechamiento de la función $[|a|>1]$ provoca una transformada que abarca muchas más frecuencias.

- Teniendo en cuenta que el área que encierran la función temporal $A_{f(t)} = A_{F(\nu)}$ y el que encierra la función recíproca en el plano de las frecuencias es el mismo (es decir, la energía es la misma) podemos ver que una pulsación con la misma energía (A) excita un mayor número de frecuencias cuanto más corto sea (menos dure) lo cual se consigue con $a \gg 1$. De esta forma podemos excitar un gran número de frecuencias con un impacto muy breve para: caracterizar materiales (ya que es más probable hacerlo entrar en resonancia y poder detectar su...

...frecuencia de resonancia) ej: detección de dobles enlaces en petroquímica con un impulso láser ultracorto.; para destruir construcciones (voladuras) haciéndolas entrar en resonancia ; para penetrar blindajes, etc...

- Otro uso muy relevante es para evitar excitar algunas frecuencias (como las de los edificios cercanos a una obra) ajustando el impulso que usemos para que coincida la frecuencia del edificio con un cero de la transformada.

- DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO: podemos desplazar la función temporal:

$$\boxed{f(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-i2\pi\nu t_0} F(\nu)}$$

- ¿qué le ocurre al espectro si desplazamos en el tiempo? NADA, no se ve afectado porque solo cambia la fase, muy importante en el campo de ondas electromagnéticas, interferencias, filtros, etc...

NOTA: recordemos que multiplicar por $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$ es girar $\frac{\pi}{2}$ en el plano complejo

- <u>DESPLAZAMIENTO EN FRECUENCIA</u>: podemos desplazar la función en frecuencias como:

$$\boxed{f(t)\, e^{i2\pi\nu_0 t} \Longleftrightarrow F(\nu-\nu_0)}$$

- <u>DIFERENCIACIÓN</u>: las derivadas en el plano temporal no equivalen a derivadas en el plano de las frecuencias, facilitando la resolución de las ee. dd.

$$\boxed{\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Longleftrightarrow (i\,2\pi\nu)^n F(\nu)} \qquad (-i2\pi t)^n f(t) \Longleftrightarrow \frac{d^n F(\nu)}{d\nu^n}$$

Demostración:

$$\frac{d f(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\right) d\nu =$$

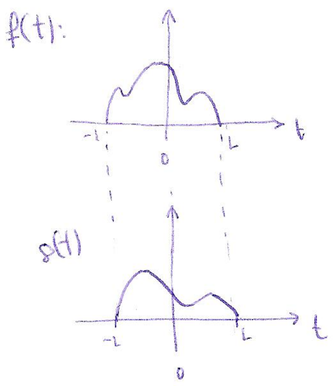
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, i2\pi\nu\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu = i\,2\pi\nu\, \mathcal{F}^{-1}\left(F(\nu)\right)$$

- <u>CONVOLUCIÓN</u>: la convolución de dos funciones para un valor concreto consiste en tomar una de las dos tal como es y la otra dada la vuelta y centrada sobre dicho valor, de forma que el valor de la convolución es el área comprendida entre las dos funciones y el eje:

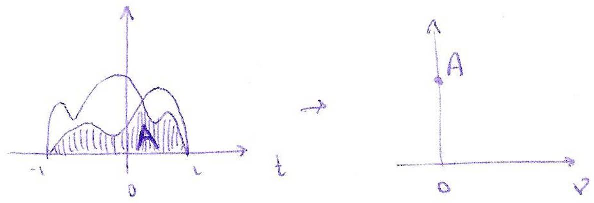
$$\boxed{f(t) * g(t) \Longleftrightarrow F(\nu)\cdot G(\nu)}$$

A.

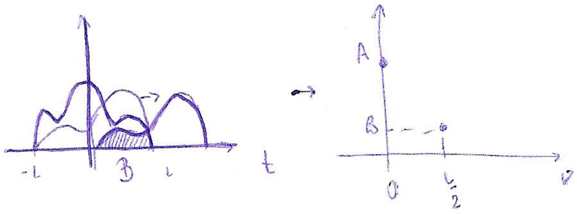
CONVOLUCIÓN:



$f(0) * g(0) \Leftrightarrow A$



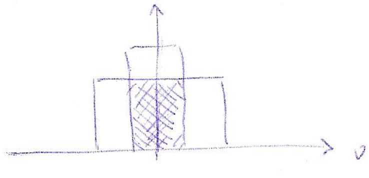
$f(\frac{L}{2}) * g(\frac{L}{2}) \Leftrightarrow B$



Cuando las áreas no se intersecten, la resultante será nula.

- Una de las utilidades de la convolución es el fitrado de frecuencias:

$$\text{sinc}(at) * \text{sinc}(bt) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} \Pi\left(\frac{\nu}{a}\right) \cdot \Pi\left(\frac{\nu}{b}\right)$$



- TEOREMA DE LA POTENCIA: g^* = conjugado complejo de $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) G^*(\nu)\, d\nu$$

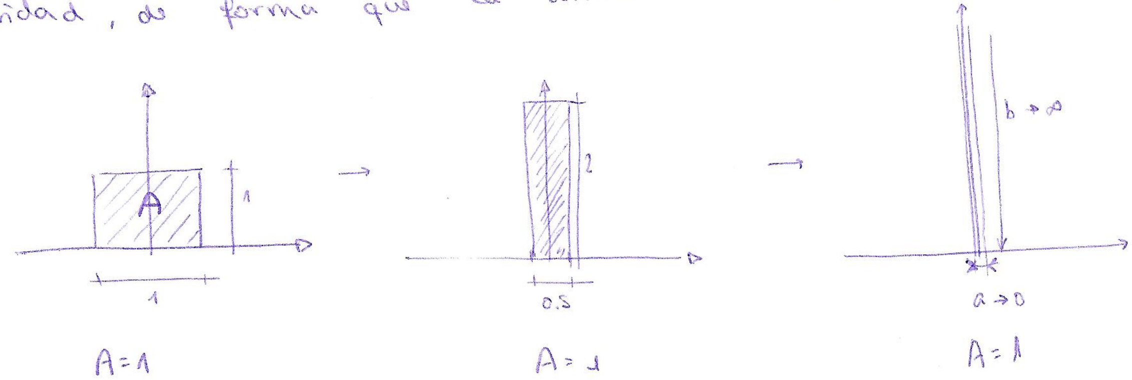
- TEOREMA DE RAYLEIGH (IGUALDAD DE PARSEVAL): la energía de la función se conserva en los dos planos:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2\, d\nu}$$

5.2.2. DELTA DE DIRAC

- La función δ o delta de Dirac se define como una función que depende de un parámetro, siendo cero si el parámetro no es nulo e infinito si es nulo; con un área unidad entre $-\infty$ e ∞.

- Desde el punto de vista matemático no es una función y se construye (partiendo de un pulso unidad) reduciendo la anchura hasta el límite cuando tiende a cero, manteniendo un área unidad, de forma que la altura se hace infinita.



- Podemos trabajar con la delta de Dirac desde la teoría de distribuciones (de finales del S.XX, elaborada entre otros por Schwartz) como una aplicación que nos da la medida de algo mediante el producto escalar de funciones:

definición del prod. escalar de funciones → $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx$ ⟶ $\boxed{(\delta, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x)\, dx = f(0)}$

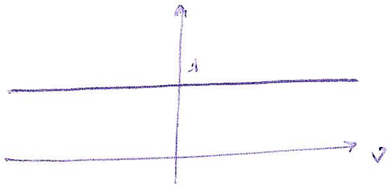
→ La delta de Dirac nos da el valor de la función cuando se anula el parámetro del que depende:

$$\boxed{\begin{gathered}(\delta(x-x_0), f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x)\, dx = f(x_0) \\ x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0\end{gathered}}$$

- TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA DELTA DE DIRAC:

- Al hacer la transformada de Fourier vemos que es un impulso ideal ya que excitaría todas las frecuencias por igual: (sinc ideal)

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{-i2\pi\nu x} dx = e^{0} = 1$$



$$\overset{x}{\delta(x)} \Leftrightarrow \overset{\nu}{1}$$

- Una de las principales aplicaciones de la delta (δ) será muestrear los valores que toma una función en distintos puntos, ya que hemos visto que aplicada a una función $f(x)$ en un punto x_0, nos devuelve el valor de la función.

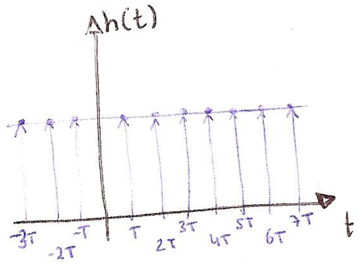
- Otra aplicación de la delta será su utilización para resolver integrales de distintas funciones y transformadas ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt = \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = \delta(\omega-\omega_0)$$

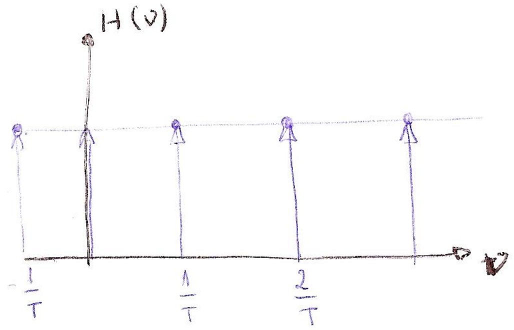
¿qué vale la integral? $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega)$

- El empleo de deltas para muestrear los valores que toma una función se realiza con trenes de impulsos, cuya transformada es también un tren de impulsos de periodo inverso:



$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \longrightarrow$$

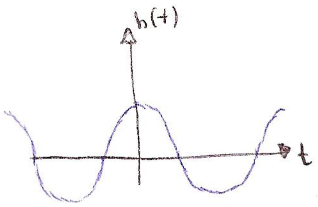
$$H(\nu)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\frac{n}{T}\right)$$

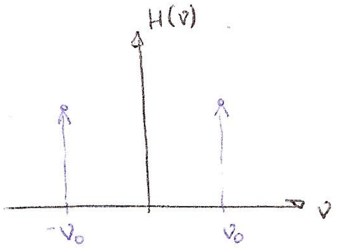


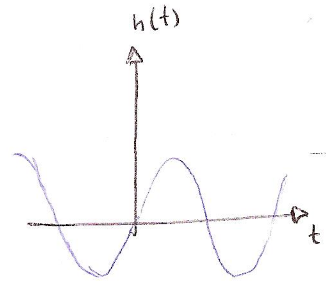
- De esta forma al disminuir el periodo (aumentar la frecuencia) de los impulsos en el plano temporal (los tenemos más juntos), la separación de los impulsos en el dominio de la frecuencia crece (separación de espectros).

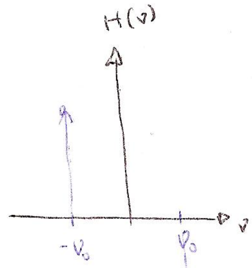
- FUNCIONES ÚTILES CON DELTA

- La transformada de la función seno está formada por dos deltas (si tomamos la parte del seno negativa), situadas en el plano real de la frecuencia. La función seno se encuentra en el plano imaginario, pero una de sus deltas es negativa.







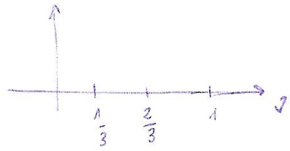


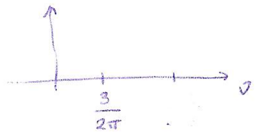
$h(t)=A\cos(2\pi\nu_0 t) \rightarrow$ $H(\nu)=\frac{A}{2}\delta(\nu-\nu_0)+\frac{A}{2}\delta(\nu+\nu_0)$

$h(t)=A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu_0 t) \rightarrow H(\nu)=-i\frac{A}{2}\delta(\nu-\nu_0)+i\frac{A}{2}\delta(\nu+\nu_0)$

- Es importante tener en cuenta las relaciones que existen entre los periodos en el tiempo y su recíproco en la frecuencia:

tiempo		frecuencias
$T = 3s$	$\longrightarrow$	$\nu = \frac{1}{3} Hz$
$\cos(3t)$	$\longrightarrow$	$\nu = \frac{3}{2\pi} Hz$



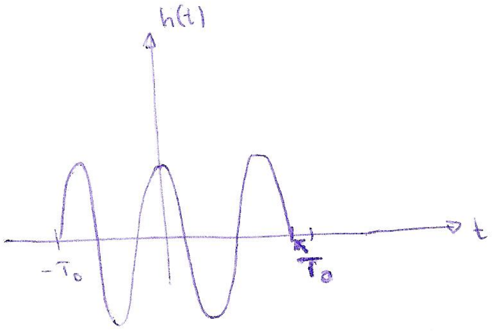


- Cuando tratemos una señal real, compuesta por varias señales sinusoidales y cosenoidales, obtendremos la frecuencia de cada vibración.

- Este suceso es habitual ya que vemos y oímos en espectros de frecuencias que se entremezclan en una sola señal lumínica o sonora.

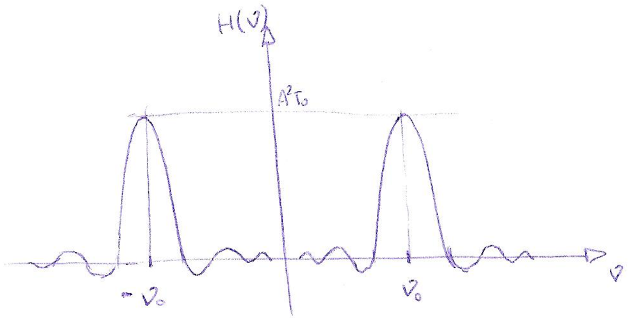
- MEDICIONES REALES: a la hora de medir señales en la vida real no dispondremos de tiempo infinito, sino que haremos una medición durante un lapso de tiempo concreto T, fuera del cual la señal es nula.

- Podemos expresar este fenómeno como la función obtenida por un pulso rectangular cuyo ancho equivale al lapso de tiempo que hemos estado midiendo.



$$F(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)\cdot \Pi(2T_0)$$

$$\Downarrow$$



$$F(\nu) = A^2T_0\left[\delta(\nu+\nu_0)+\delta(\nu-\nu_0)\right] * \text{sinc}(\ldots)$$

- Como hemos representado el resultado como un producto de la función obtenida (ej: coseno) y un pulso rectangular de ancho el tiempo medido (actúa como filtro pasa-banda), la transformada será la convolución de sus transformadas, es decir, la convolución de las deltas del coseno y la sinc del pulso

NOTA: aliasing

- La convolución estará centrada donde se encuentren las deltas y tendremos dos sinc, ya que la convolución con la delta nos devuelve la función.

- La anchura de la sinc depende del tiempo que hemos medido de forma que cuanto más tiempo midamos más estrecha será la sinc y, por tanto, más precisa la medida que realizemos.

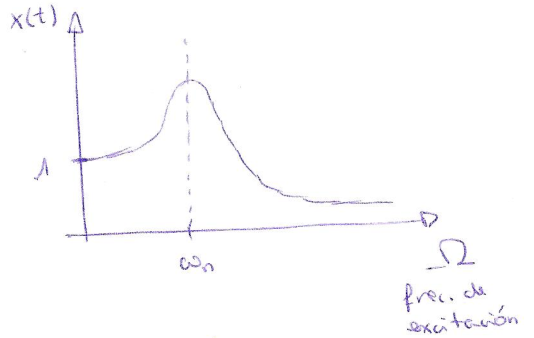
- No obstante, existen dos inconvenientes prácticos, no tenemos un tiempo ilimitado para medir y aunque lo tuvieramos, el amortiguamiento de las señales nos limita el tiempo de medida al tiempo que tardan en amortiguarse, limitando a su vez la precisión.

5.3. APLICACIONES PRÁCTICAS

5.3.1. RESPUESTAS DE SISTEMAS LINEALES: EXCITACIONES PERIÓDICAS

- Para estudiar la respuesta de sistemas mecánicos lineales a excitaciones periódicas $f(t)$ de frecuencias Ω; utilizábamos el análisis de la resonancia:

frecuencia natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$



$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

Excitación:

$$f(t) = F_0 \text{ sen } \Omega t$$

Respuesta:

$$x(t) = X_0 \text{ sen}(\Omega t + \phi)$$

- donde:

$$X_0 = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2}}$$

- Podemos expresar la excitación periódica de forma general como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \text{ sen } j\omega t$$

$$\begin{cases} a_j = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) \cos j\omega t \, dt & j = 0, 1, 2, \dots \\ b_j = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) \text{ sen } j\omega t \, dt & j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Aplicando el pco. de superposición a nuestro sist. mecánico:

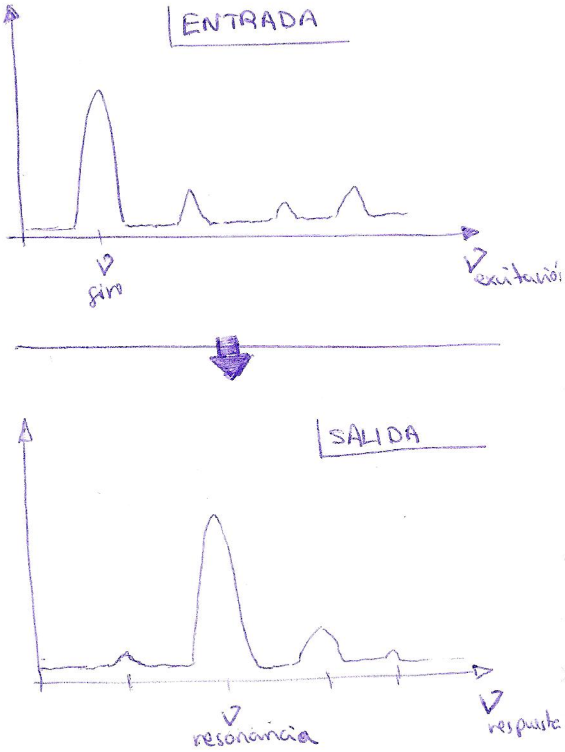
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \frac{a_0}{2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = a_j \cos j\omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = b_j \text{ sen } j\omega t$$

$$\longrightarrow x(t) = \frac{a_0}{2K} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j/K)\cos(j\omega t - \phi_j)}{((1-j^2r^2)^2 + (2\xi j r)^2)^{1/2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j/K)\text{ sen}(j\omega t - \phi_j)}{((1-j^2r^2)^2 + (2\xi j r)^2)^{1/2}}$$

- La frecuencia habitual de excitación para el sistema será la de giro del elemento que estemos estudiando (motores, turbinas, hélices, ...) siendo el resto de excitaciones múltiplos (más o menos exactos en función del sistema) de esa frecuencia de giro.



- Nuestro interés se centrará en analizar las frecuencias de excitación que recibe el sistema (si no las ponemos nosotros) y estudiar la salida del sistema.

- En la señal de salida debemos buscar las frecuencias más relevantes de forma que podamos detectar si alguna de las frecuencias de excitación se corresponde con la de resonancia del sistema pudiendo evitarla o fomentarla según el objetivo del análisis.

- Este estudio es vital para el diseño de máquinas y estructuras sometidas a excitaciones periódicas, con el fin de evitar vibraciones peligrosas que puedan poner en riesgo su integridad.

5.3.2. RESPUESTA DE SISTEMAS LINEALES: EXC. NO PERIÓDICAS

- Ante excitaciones no periódicas $f(t)$ de sistemas mecánicos lineales $[m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx]$ aplicamos la transformada de Fourier a ambas partes para conocer la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia:

$$\left.\begin{array}{c} m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t) \\ \downarrow \\ \left((i\omega)^2 m + (i\omega)c + K\right) X(\omega) = F(\omega) \end{array}\right\} \quad X(\omega) = \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + i\omega c + K}$$

- Para realizar el análisis del sistema debemos tener claro cuál es la señal de entrada que "metemos" al sistema $[f(t)]$ y conocer el sistema $[h(t)]$ para saber la respuesta que nos devolverá $[x(t)]$

$$\boxed{\begin{array}{c} f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{x(t)} \\ \\ F(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \xrightarrow{X(\omega) = H(\omega)F(\omega)} \end{array}}$$

- Cuando pasamos al plano de las frecuencias resulta que la respuesta del sistema es el producto de la entrada y la transformada del sistema.

- Aplicando las propiedades de la transformada, podemos enunciar que:

$$\boxed{X(\omega) = H(\omega)\,F(\omega) \longleftrightarrow x(t) = h(t) * f(t)}$$

- Para conocer la respuesta del sistema dada por la función de transferencia, podemos enviarle una delta de entrada y así obtener la función de transferencia:

$$f(t) = \delta(t) \rightarrow X(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) = H(\omega) \longrightarrow x(t) = h(t)$$

- Como la delta no se puede alcanzar, utilizamos el impulso más corto posible para tratar de excitar todas las frecuencias.

- De nuevo, en la vida real, un único impulso muy corto se amortiguaría muy rapidamente, dando un tiempo muy corto de medida y, por tanto, falta de precisión. Para evitarlo se utilizan los trenes de impulsos.

- La función de transferencia h(t) que obtengamos nos caracteriza el sistema y es independiente de la excitación.

5.3.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

1. Aplicamos la transformada de Fourier sobre la variable de la que no tenemos datos (x si valor inicial, t si contorno)
2. Aplicamos la transformada de Fourier a las condiciones
3. Resolvemos y hallamos la tranformada inversa.

Ejemplo: ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x,0) = f(x)$

$\alpha = \frac{1}{\lambda} \equiv \nu$

1. Aplicamos la transf. sobre x

a. $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \frac{dU}{dt}$

b. $\mathcal{F}\left(K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = K\,(i2\pi\alpha)^2\, U(\alpha,t)$

$$\frac{dU(\alpha,t)}{dt} = K\,(i2\pi\alpha)^2\, U(\alpha,t)$$

$$\frac{1}{U}\,dU = -4\pi^2\alpha^2 K\,dt$$

$\ln U = -4\pi^2\alpha^2 Kt + C \Rightarrow U(\alpha,t) = C e^{-4\pi^2\alpha^2 Kt}$

2. Aplicamos las cond.

$$\left.\begin{array}{l} U(\alpha,0) = F(\alpha) \\ U(\alpha,0) = C e^0 \end{array}\right\} C = F(\alpha) \Rightarrow \boxed{U(\alpha,t) = F(\alpha)\cdot e^{-4\pi^2\alpha^2 Kt}}$$

solución en frecuencia

3. Calculamos la inversa:

$$u(x,t) = f(x) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2\alpha^2 Kt}\right)$$

NOTAS: diseño de filtros con impulsos rectangulares

NOTAS: geometría de masas: integral definida:

$$¿\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx? \Longrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx \xrightarrow{\text{si } \omega = 0} \boxed{F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}$$